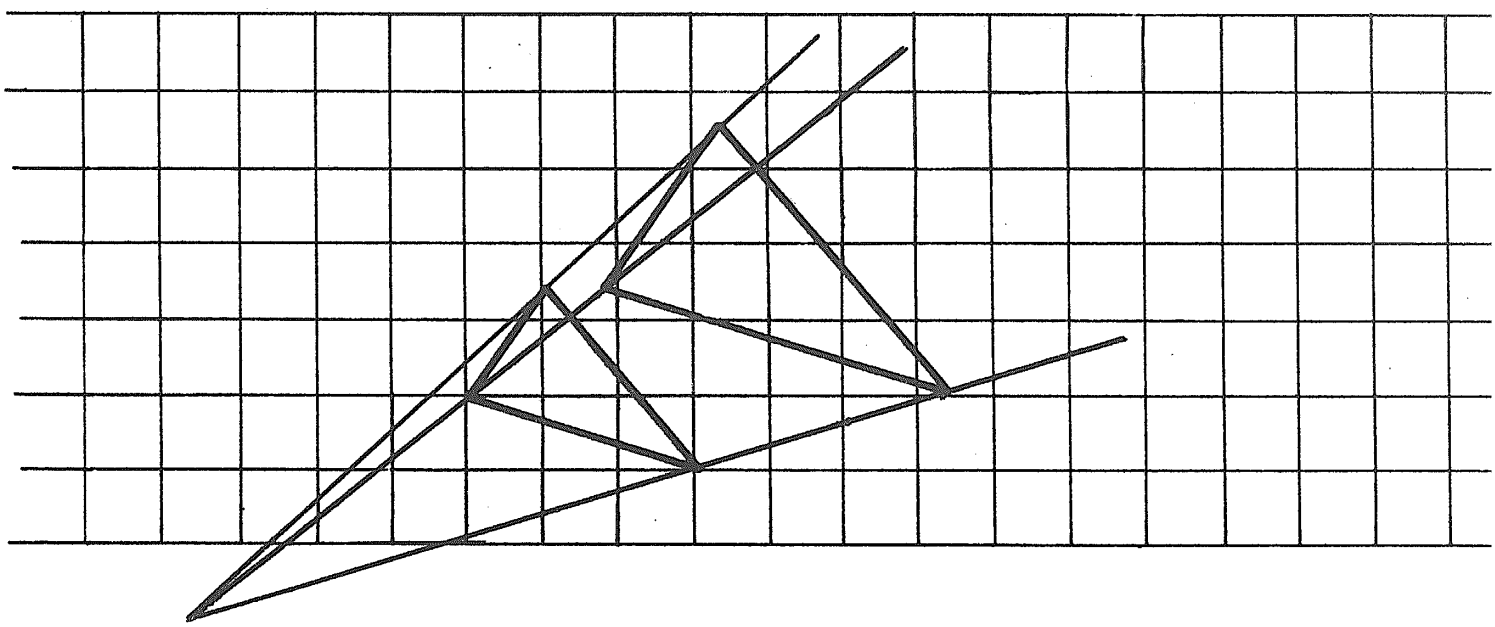
RELACIÓN DE SEMEJANZA

Obras que integran el bloque 4 *(Geometría euclidiana)*:

1. Conjuntos de puntos
2. Relaciones binarias
3. Figuras planas
4. El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos
5. Polígonos convexos
6. ***Relación de semejanza***
7. Geometría métrica en el plano
8. Cuerpos geométricos

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 4

Geometría euclidiana

Módulo 6
RELACIÓN DE SEMEJANZA

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
RELACIÓN DE SEMEJANZA
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1984
ISBN 968-24-1245-5

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

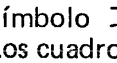
Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo  , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

6.1 Semejanza de polígonos

6.2 Semejanza de triángulos

6.3 Cuarta proporcional

6.4 Teorema de la media proporcional

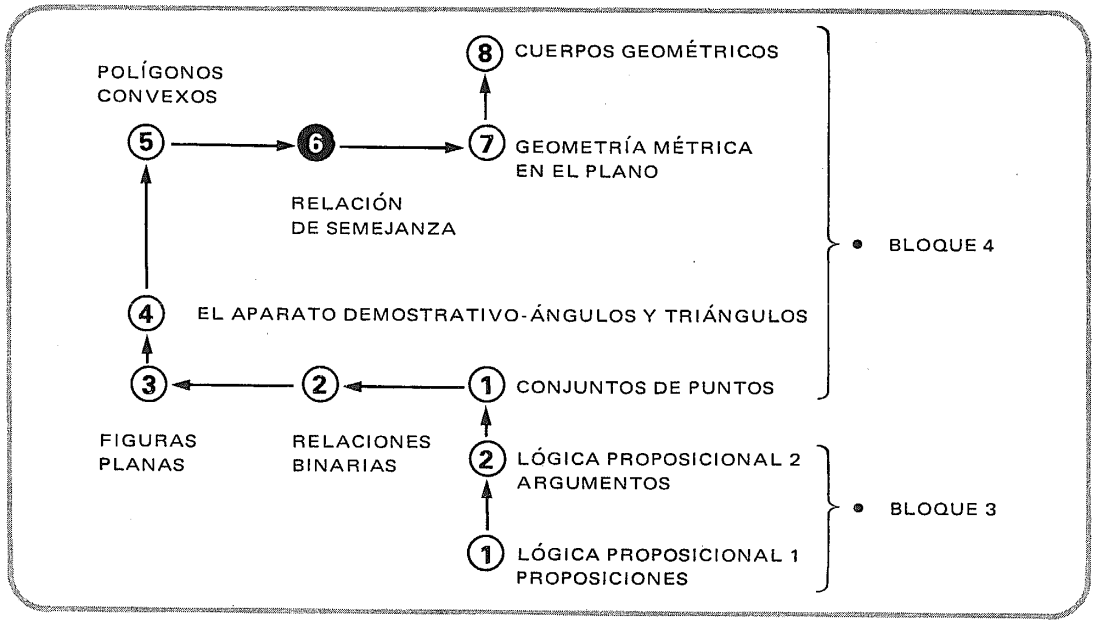
6.5 Teorema de Pitágoras

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 4. Geometría euclidiana

Objetivos: establecer algunos hechos geométricos relacionados con ciertos conjuntos de puntos y demostrar determinados teoremas a partir de un grupo dado de axiomas o postulados básicos, aplicando las reglas del juego de la lógica

Esquema estructural del bloque 4



Módulo 6. Relación de semejanza

Objetivos: establecer algunos hechos geométricos relacionados con la semejanza de triángulos polígonos en general, y aplicarlos a la resolución de problemas prácticos

Prerrequisitos:

	Bloque	Módulo(s)
• Las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética (suma, resta, multiplicación y división) y la raíz cuadrada	-	-
• Razón y proporción (concepto y manejo)	-	-
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Nociones de lógica matemática	3	1, 2
• Relaciones binarias en geometría	4	2

6.1

Semejanza de polígonos

1

Recordemos que

razón

es el cociente de
dos números que
representamos así:

$\frac{a}{b}$ ó **a : b**

y leemos:

a es a b.

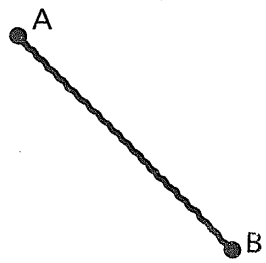
2

Vamos a considerar, ahora,
un segmento $\overline{AB}$.

Sabemos que es posible
asociar a él un número
real no negativo
que llamamos su

medida

y que
simbolizamos $\lfloor_____\rfloor$

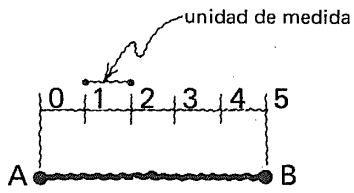


$\lfloor\overline{AB}\rfloor$

3

Al segmento $\overrightarrow{AB}$ le asociamos el número real no negativo **5**, que es su medida.

Simbólicamente: $\lfloor\overrightarrow{AB}\rfloor$



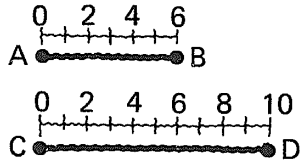
$\lfloor\overrightarrow{AB}\rfloor = 5$

4

En este caso, podemos escribir:

$$\frac{\lfloor\overrightarrow{AB}\rfloor}{\lfloor\overrightarrow{CD}\rfloor} = \frac{\square}{\square} = \square$$

en forma de fracción decimal.



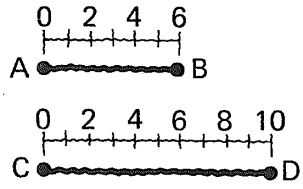
$\frac{6}{10}$ ● 0.6

5

Decimos que la **razón** de las medidas de los segmentos

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ es igual a

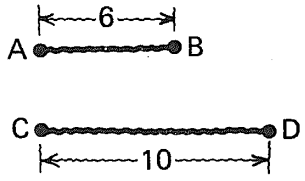
$\frac{6}{10}$ ó **0.6**.



6

También:

$$\frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\square}{\square} = \square$$



$\frac{10}{6}$ ● 1.6666...

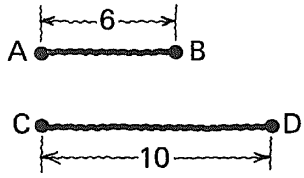
7

Observemos que

la **razón de** la medida del segmento $\overrightarrow{AB}$ **a** la medida del segmento $\overrightarrow{CD}$ es igual a

□ ó □

La **razón de** la medida del segmento $\overrightarrow{CD}$ **a** la del segmento $\overrightarrow{AB}$ es igual a □ ó □



$\frac{6}{10}$ ● 0.6

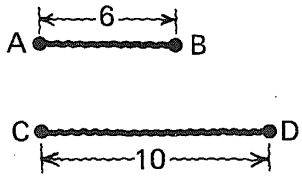
$\frac{10}{6}$ ● 1.666...

8

Decimos que las medidas de los segmentos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ **están en razón de 6 a 10,** o que **la razón de sus medidas es** $\frac{6}{10}$ ó **0.6**

Y también: las medidas de los segmentos $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB}$ □

o que □



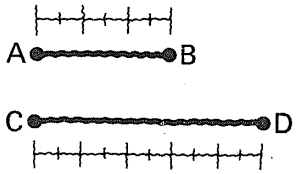
● están en razón de 10 a 6

● la razón de sus medidas es 10/6 ó 1.666...

9

Pero,
también podemos
decir que
la razón de las medidas
de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
es igual a

$\frac{3}{5}$ ó **0.6**



10

Las razones $\frac{6}{10}$ y $\frac{3}{5}$ son **equivalentes.**

Expresadas en forma de fracción
decimal, ambas son iguales a [_____]

0.6

11

A los términos de la razón $\frac{a}{b}$
les llamamos:

antecedente (a)

y

consecuente (b)

12

Si multiplicamos los dos términos
de una razón
por un mismo número (diferente de cero)
obtenemos una

razón equivalente.

13

Multiplicamos por [ ]

los dos términos de la razón $\frac{6}{10}$

para obtener la razón equivalente $\frac{3}{5}$.

$\frac{1}{2}$

14

Si multiplicamos
los dos términos de la razón $\frac{6}{10}$

digamos, por 3,

obtenemos la razón equivalente [ ]

que, expresada en forma de

fracción decimal, es [ ]

$\frac{18}{30}$

0.6

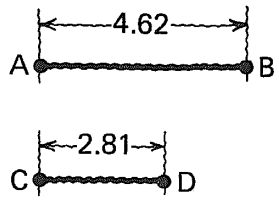
15

La razón de la medida de $\overleftrightarrow{AB}$

a la medida de $\overleftrightarrow{CD}$

es igual a

____ ó _____



$\frac{4.62}{2.81}$ • 1.6441281 ...

16

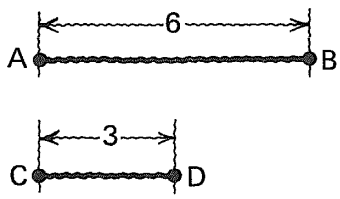
La razón de la medida de $\overleftrightarrow{AB}$

a la medida de $\overleftrightarrow{CD}$ es igual a

____ ó _____

La medida de $\overleftrightarrow{AB}$ es el ____

de la de $\overleftrightarrow{CD}$.



$\frac{6}{3}$ • 2

doble

17

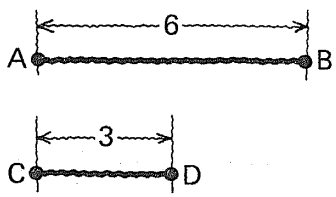
La razón de la medida de $\overleftrightarrow{CD}$

a la medida de $\overleftrightarrow{AB}$ es igual a

____ ó _____

La medida de $\overleftrightarrow{CD}$ es ____

de la medida de $\overleftrightarrow{AB}$.



$\frac{3}{6}$ • $\frac{1}{2}$

la mitad (un medio de)

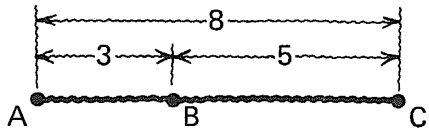
18

La razón de la medida de

$\overleftrightarrow{AB}$ a la medida de $\overleftrightarrow{BC}$

es igual a

____ ó _____



La razón de la medida de

$\overleftrightarrow{AB}$ a la medida de $\overleftrightarrow{AC}$

es igual a

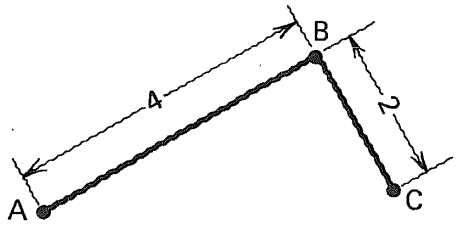
____ ó _____

$\frac{3}{5}$ ● 0.6

$\frac{3}{8}$ ● 0.375

19

$\frac{|\overleftrightarrow{AB}|}{|\overleftrightarrow{BC}|} =$ ____ = _____



$\frac{4}{2}$ ● 2 (ó $\frac{2}{1}$)

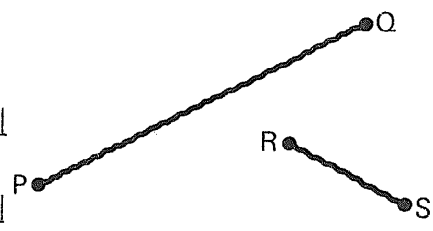
20

$|\overleftrightarrow{PQ}|$ es el triple de $|\overleftrightarrow{RS}|$

$|\overleftrightarrow{PQ}|$ y $|\overleftrightarrow{RS}|$ están en

razón de ____ a _____

$\frac{|\overleftrightarrow{PQ}|}{|\overleftrightarrow{RS}|} =$ ____ = _____



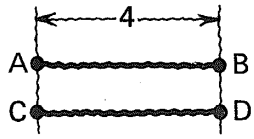
3 a 1

$\frac{3}{1}$ ● 3

21

$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \square = \square$.

La razón de las medidas de los segmentos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ es igual a $\square$



Esto significa que los dos segmentos son $\square$

$\frac{4}{4}$ • 1

1

congruentes

22

$\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$

son dos razones $\square$

Podemos escribir entonces la siguiente relación:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

equivalentes

23

A la relación de igualdad de dos razones equivalentes le llamamos

proporción.

La expresión general de una proporción es:

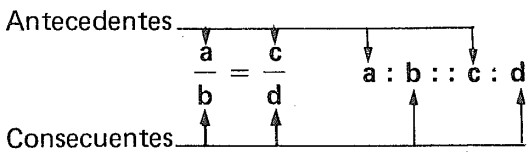
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

o bien **a : b :: c : d**

y se lee: "**a** *es a* **b** *como* **c** *es a* **d**".

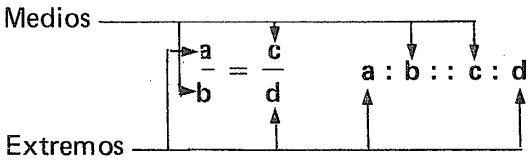
24

Elementos de una proporción.



25

Elementos de una proporción.



26

En toda proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

se verifica que $ad = bc$.

El producto de los extremos es igual al producto de los medios.

27

Ejemplo.

En la proporción $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

se verifica que $3 \times 8 = 4 \times 6$

$24 = 24$

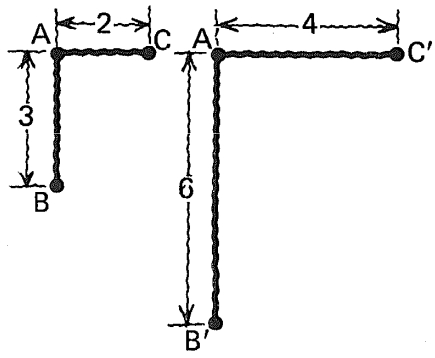
28

En esta figura vemos que:

$\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{A'C'}|} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

y

$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$



$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

29

Como

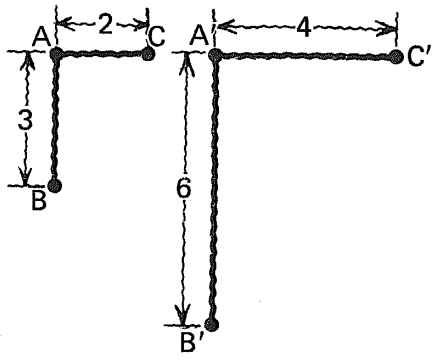
$\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{A'C'}|} = \frac{1}{2}$

y

$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|} = \frac{1}{2}$

podemos escribir la proporción:

$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

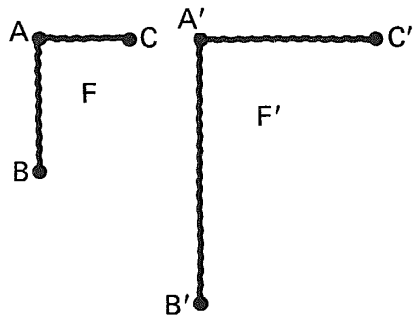


$\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{A'C'}|} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|}$

30

Si se verifica:

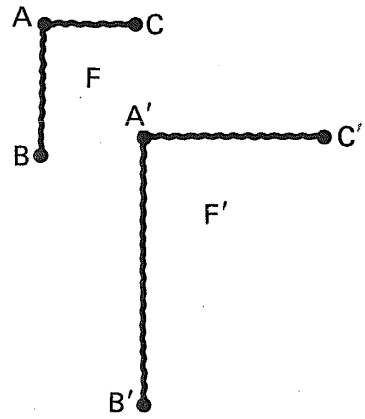
$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{A'C'}|}$$



decimos que los segmentos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ de la figura F **son proporcionales a** los segmentos $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{A'C'}$ de la figura F'.

31

La **razón de proporcionalidad** de los segmentos de la figura F a los de la figura F' es igual a [ ].



Esto significa que:

la medida de cada uno de los segmentos de F es igual a **la mitad** de la medida de cada uno de los segmentos correspondientes de F'.

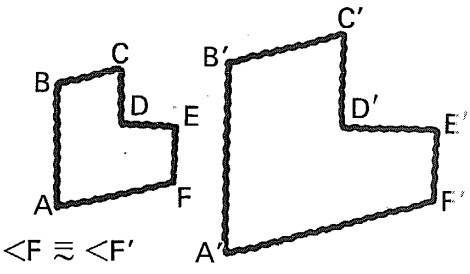
$\frac{1}{2}$ (ó 0.5)

32

Consideremos, ahora, dos polígonos.

Si se verifica:

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|} = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{B'C'}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{C'D'}|} = \frac{|\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{D'E'}|} = \frac{|\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{E'F'}|} = \frac{|\overrightarrow{FA}|}{|\overrightarrow{F'A'}|}$$



y

$\angle A \cong A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle D \cong \angle D'$, $\angle E \cong \angle E'$, $\angle F \cong \angle F'$

decimos que:

los polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' son semejantes.

33

Si se verifican las condiciones dadas en el cuadro anterior decimos también que:

el polígono ABCDEF es semejante al polígono A'B'C'D'E'F',

o que

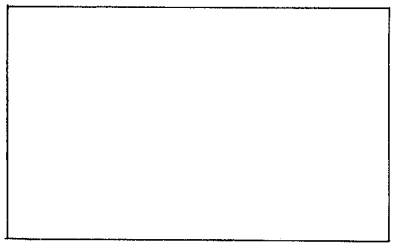
el polígono A'B'C'D'E'F' es semejante al polígono ABCDEF.

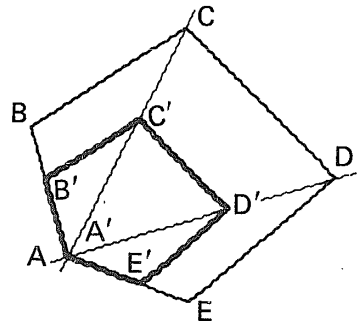
34

Recíprocamente,

si los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' son semejantes,

entonces,





$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|} = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{B'C'}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{C'D'}|} = \frac{|\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{D'E'}|} = \frac{|\overrightarrow{EA}|}{|\overrightarrow{E'A'}|}$$

y

$\angle A \cong \angle A'$
$\angle B \cong \angle B'$
$\angle C \cong \angle C'$
$\angle D \cong \angle D'$
$\angle E \cong \angle E'$

35

Entonces,

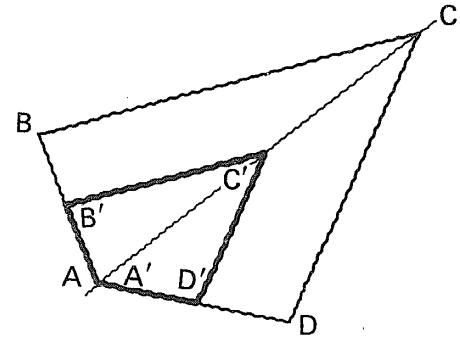
dos polígonos son semejantes

si y sólo si

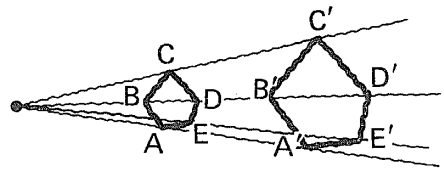
los lados de uno de ellos son respectivamente proporcionales a los del otro

y

los ángulos interiores de uno son respectivamente congruentes a los del otro.



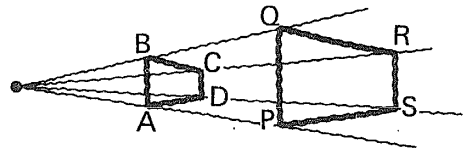
36



Si el polígono ABCDE es semejante al polígono A'B'C'D'E' diremos que:

- el lado $\overrightarrow{AB}$ es **homólogo** del lado $\overrightarrow{A'B'}$, etcétera;
- el ángulo BAE es **homólogo** del ángulo B'A'E', etcétera.

37



El lado ⌊___⌋ es homólogo del lado ⌊_____⌋

El lado ⌊___⌋ es homólogo del lado ⌊_____⌋

El lado ⌊___⌋ es homólogo del lado ⌊_____⌋

El lado ⌊___⌋ es homólogo del lado ⌊_____⌋

Por ejemplo:

$\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{BC}$ • $\overrightarrow{QR}$

$\overrightarrow{CD}$ • $\overrightarrow{RS}$

$\overrightarrow{DA}$ • $\overrightarrow{SP}$

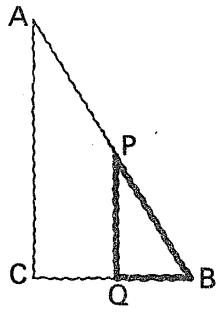
38

Atención.

El △ CAB es semejante al △QPB.

Lados
- ⌊___⌋ es homólogo de ⌊___⌋
- ⌊___⌋ es homólogo de ⌊___⌋
- ⌊___⌋ es homólogo de ⌊___⌋

Ángulos interiores
- ⌊___⌋ es homólogo de ⌊___⌋
- ⌊___⌋ es homólogo de ⌊___⌋
- ⌊___⌋ es homólogo de ⌊___⌋



Por ejemplo:

$\overrightarrow{CA}$ • $\overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{CB}$ • $\overrightarrow{QB}$

$\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{PB}$

$\angle ACB$ • $\angle PQB$

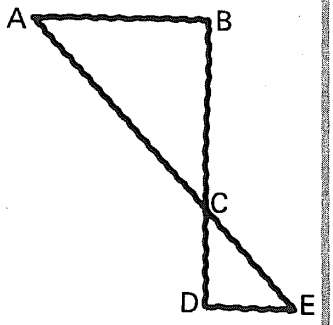
$\angle CAB$ • $\angle QPB$

$\angle ABC$ • $\angle ABC$ ó $\angle PBQ$

39

Atención.

El △ABC es semejante al △CDE



Lados
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋

Ángulos interiores
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋

Por ejemplo:

$\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{BC}$ • $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AC}$ • $\overrightarrow{CE}$

$<CAB$ • $<CED$

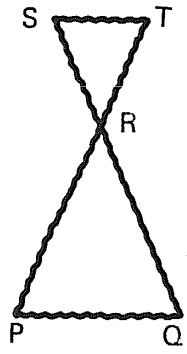
$<ABC$ • $<CDE$

$<ACB$ • $<DCE$

40

Atención.

El △PQR es semejante al △RST



Lados
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋

Ángulos interiores
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋

(en cualquier orden)

$\overrightarrow{PQ}$ • $\overrightarrow{ST}$

$\overrightarrow{PR}$ • $\overrightarrow{RT}$

$\overrightarrow{QR}$ • $\overrightarrow{RS}$

$<QPR$ • $<RTS$

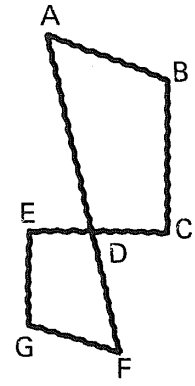
$<PQR$ • $<RST$

$<PRQ$ • $<SRT$

41

Atención.

El cuadrilátero ABCD es semejante al cuadrilátero EDFG.



Lados
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋

Ángulos interiores
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋
- ⌊⌋ es homólogo de ⌊⌋

$\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{BC}$ • $\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{CD}$ • $\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{AD}$ • $\overrightarrow{DF}$

$<BAD$ • $<DFG$

$<ABC$ • $<EGF$

$<BCD$ • $<DEG$

$<CDA$ • $<EDF$

4.6.1.1

Práctica adicional
si se
considera necesario.

42

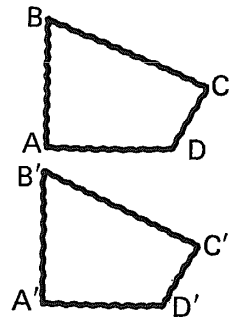
Atención.

Si dos polígonos son congruentes

sus lados homólogos son [ ]

y

sus ángulos homólogos son [ ]



congruentes

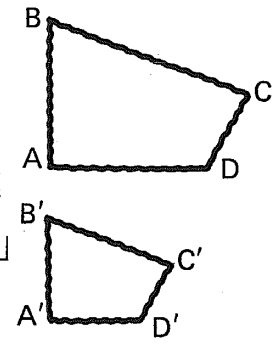
congruentes

43

Si dos polígonos son semejantes

sus lados homólogos son [ ]

sus ángulos homólogos son [ ]



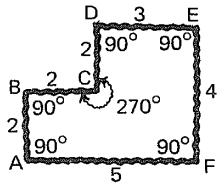
proporcionales

congruentes

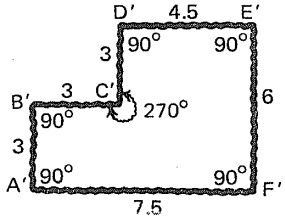
44

Atención.

Señalar la opción correcta.



Los polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' **son/no son** semejantes, porque



- son
- los ángulos interiores son respectivamente congruentes y

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|} = \frac{2}{3} = 0.666\ldots$$

$$\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{B'C'}|} = \frac{2}{3} = 0.666\ldots$$

$$\frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{C'D'}|} = \frac{2}{3} = 0.666\ldots$$

$$\frac{|\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{D'E'}|} = \frac{3}{4.5} = 0.666\ldots$$

$$\frac{|\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{E'F'}|} = \frac{4}{6} = 0.666\ldots$$

$$\frac{|\overrightarrow{FA}|}{|\overrightarrow{F'A'}|} = \frac{5}{7.5} = 0.666\ldots$$

45

En los polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' hemos encontrado del cuadro anterior que:

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|} = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{B'C'}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{C'D'}|} = \frac{|\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{D'E'}|}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{E'F'}|} = \frac{|\overrightarrow{FA}|}{|\overrightarrow{F'A'}|} = \mathbf{0.666\ldots}$$

Decimos que:

0.666... es la **razón de semejanza** del polígono ABCDEF al polígono A'B'C'D'E'F'.

46

Ahora bien:

la **razón de semejanza** del polígono A'B'C'D'E'F' al polígono ABCDEF sería

1.5 ó $\frac{3}{2}$

47

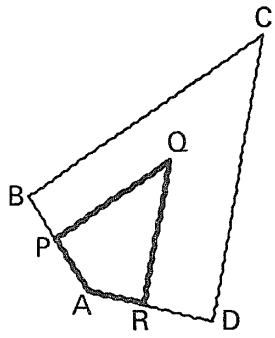
Si sabemos que
ABCD y APQR son polígonos semejantes, y

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{2}$$

decimos que:

la **razón de semejanza** del polígono APQR al ABCD es igual a [ ],

y la **razón de semejanza** del polígono ABCD al APQR es igual a [ ]



$\frac{1}{2}$

2

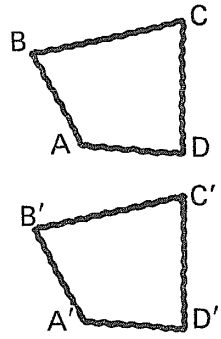
48

En los polígonos ABCD y A'B'C'D' sabemos que:

$<A \cong <A'$	y	$\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{A'B'}$
$<B \cong <B'$		$\overrightarrow{BC} \cong \overrightarrow{B'C'}$
$<C \cong <C'$		$\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{C'D'}$
$<D \cong <D'$		$\overrightarrow{DA} \cong \overrightarrow{D'A'}$

Diremos que

el polígono ABCD **es semejante al** polígono A'B'C'D' y la **razón de semejanza** es igual a [ ]



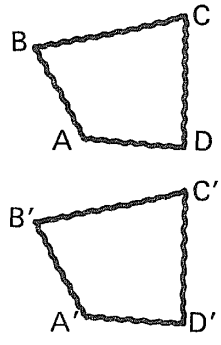
1

49

Observamos que los polígonos ABCD y A'B'C'D' que cumplen con las siguientes condiciones son **semejantes** y además

[ ]

$\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{A'B'}$	y	$<A \cong <A'$
$\overrightarrow{BC} \cong \overrightarrow{B'C'}$		$<B \cong <B'$
$\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{C'D'}$		$<C \cong <C'$
$\overrightarrow{DA} \cong \overrightarrow{D'A'}$		$<D \cong <D'$

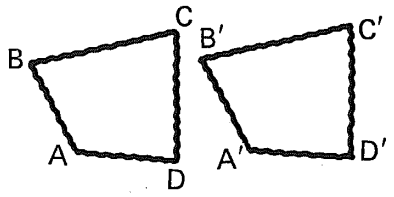


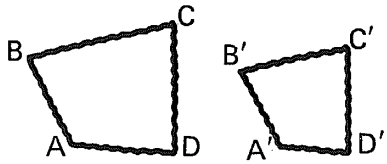
congruentes

50

Intuitivamente:

- son **congruentes** dos figuras planas "que tienen la misma forma y el mismo tamaño";
- son **semejantes** dos figuras planas que tienen "la misma forma y diferente o igual tamaño".



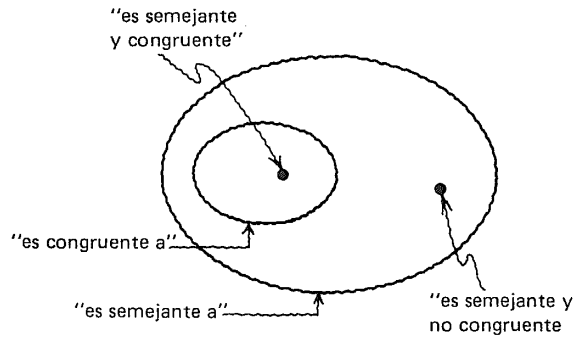


51

Vemos, entonces, que la relación de congruencia es un caso particular de la relación de semejanza.

52

Pongamos esto en un diagrama de Venn.



53

Señalar la opción correcta.

Todo par de figuras congruentes es un par de figuras semejantes. V / F

Todo par de figuras semejantes es un par de figuras congruentes. V / F

Algunos pares de figuras semejantes son pares de figuras congruentes. V / F

V

F

V

54

Señalar la opción correcta.

Si *dos figuras son congruentes,* entonces *son semejantes.* V / F

Si *dos figuras son semejantes,* entonces *son congruentes.* V / F

V

F

55

Dos figuras semejantes con una razón de semejanza igual a [ ] son también congruentes.

1

56

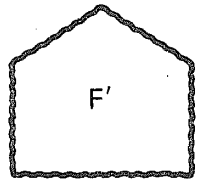
La **semejanza**
es una
relación binaria
de la forma

x R y

en que R = "es semejante a"

57

x R y



La expresión F ~ F'

la leeremos: F *es semejante a* F'.

58

¿Se verifica F ~ F?

Sí/No

Sí

59

Entonces

la relación de semejanza es ⌊_____⌋

reflexiva

60

Si F ~ F'

¿se verifica F' ~ F?

Sí/No

Sí

61

La relación de semejanza es ⌊_____⌋

simétrica

62

Si F ~ F'

y F' ~ F''

¿se verifica **F ~ F''** ?

Sí/No

Sí

63

La relación de semejanza es [_____]

transitiva

64

Por ser reflexiva, simétrica y transitiva,

la semejanza

es una relación de [_____]

equivalencia

4.6.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la semejanza de figuras planas como una relación de equivalencia,
- *interpretar* la congruencia de figuras planas como una clase particular de relación de semejanza,
- *señalar* las condiciones para que dos polígonos sean semejantes.

6.2

Semejanza de triángulos

65

Para que dos polígonos sean congruentes se requiere que los ángulos interiores de uno de ellos sean ⌊_____⌋ a los ángulos interiores del otro, y que los lados de uno de ellos sean ⌊_____⌋ a los lados del otro.

congruentes

congruentes

66

Para que dos polígonos sean semejantes se requiere que los ángulos interiores de uno de ellos sean ⌊_____⌋ a los ángulos interiores del otro, y que los lados de uno de ellos sean ⌊_____⌋ a los lados del otro.

congruentes

proporcionales

67

Hemos establecido cuatro criterios
para la congruencia de dos triángulos

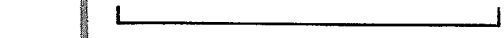
Recordémoslos.

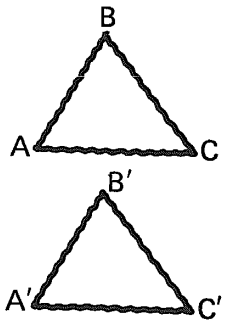
68

C1. Criterio LLL

Dos triángulos son congruentes

si y sólo si





Por ejemplo:

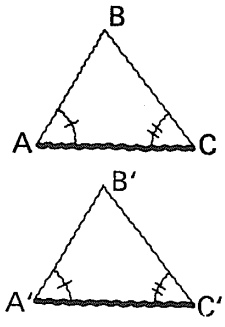
tienen sus tres lados respectivamente congruentes

69

C2. Criterio ALA

Dos triángulos son congruentes

si y sólo si



Por ejemplo:

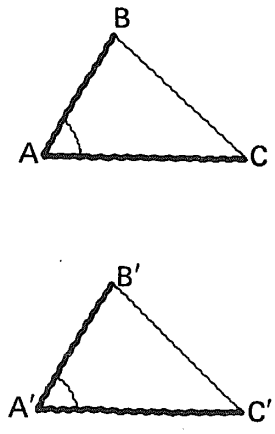
tienen respectivamente congruentes un lado y los ángulos interiores adyacentes a él

70

C3. Criterio LAL

Dos triángulos son congruentes

si y sólo si



Por ejemplo:

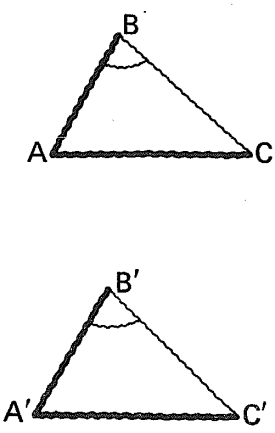
tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo comprendido

71

C4. Criterio LLA

Dos triángulos son congruentes

si y sólo si



Por ejemplo:

tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos

72

De manera similar,
vamos a establecer
algunas proposiciones
en relación con la
semejanza de triángulos,
a las que llamaremos

criterios de semejanza de triángulos.

73

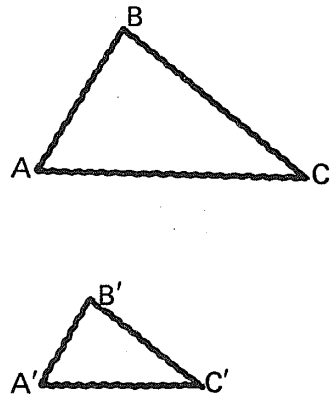
S1. Criterio LLL

Basta con probar que:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{B'C'}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{A'C'}|}$$

para concluir que:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



74

S2. Criterio LAL

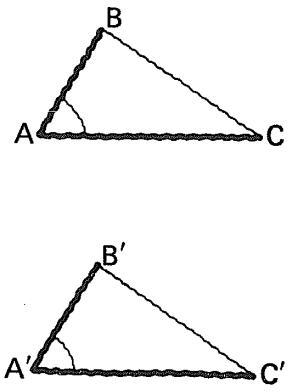
Basta con probar, por ejemplo, que:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{A'C'}|}$$

y $\angle A \cong \angle A'$

para concluir que:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



75

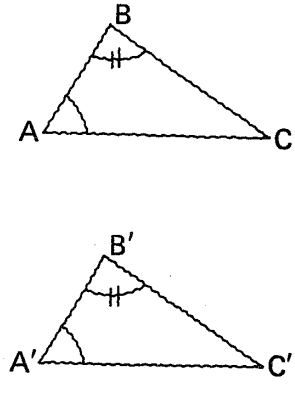
S3. Criterio AA(A)

Basta con probar, por ejemplo, que:

$\left.\begin{array}{l}\angle A \cong \angle A' \\ \angle B \cong \angle B'\end{array}\right\}$ dos ángulos interiores son congruentes

para concluir que:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



76

S4. Criterio LLA

Basta con probar, por ejemplo, que:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{A'C'}|}$$

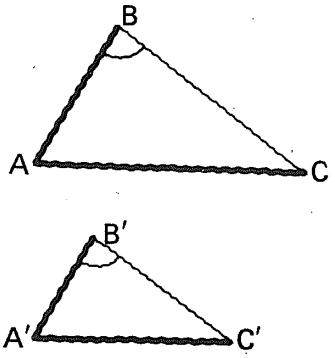
$|\overline{AC}| > |\overline{AB}|$

y

$<B \cong <B'$

para concluir que:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



77

S5. PAR/PER

Basta con probar que:

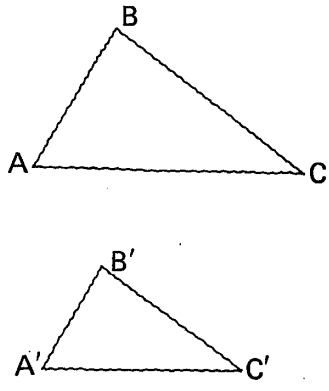
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$

$\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$

$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$

para concluir que:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$;



78

O bien
basta con probar que:

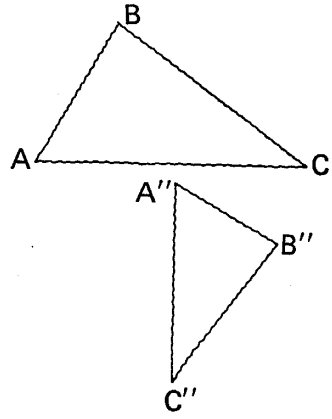
$\overleftrightarrow{A''B''} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{A''C''} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\overleftrightarrow{B''C''} \perp \overleftrightarrow{BC}$

para concluir que:

$\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.



79

S1. Criterio LLL

Dos triángulos son semejantes

si y sólo si

_____

Por ejemplo:

tienen respectivamente proporcionales sus tres lados

80

S2. Criterio LAL

Dos triángulos son semejantes

si y sólo si

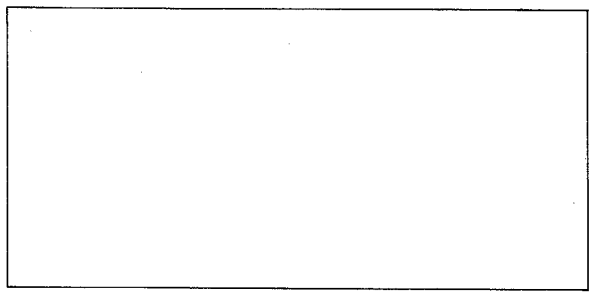
_____

Por ejemplo:

tienen un ángulo congruente, comprendido entre dos lados respectivamente proporcionales

81

S3. Criterio AA(A)



Por ejemplo:

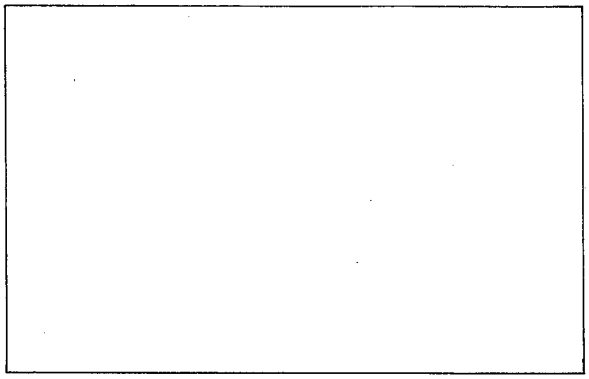
Dos triángulos son semejantes

si y sólo si

tienen dos ángulos interiores respectivamente congruentes.

82

S4. Criterio LLA



Por ejemplo:

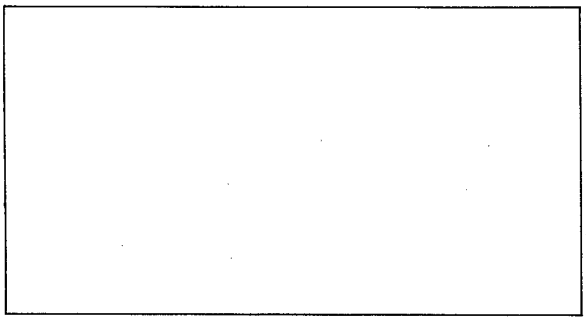
Dos triángulos son semejantes

si y sólo si

tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo opuesto al mayor de ellos respectivamente congruente.

83

S5. Criterio PAR/PER



Por ejemplo:

Dos triángulos son semejantes

si y sólo si

tienen las rectas que contienen a sus lados respectivamente paralelas o perpendiculares.

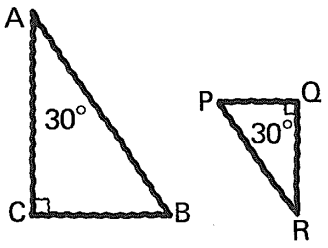
84

Señalar la opción correcta.

Los triángulos rectángulos ABC y PQR

son/no son semejantes

porque



son

cumplen con S3. AA(A)

85

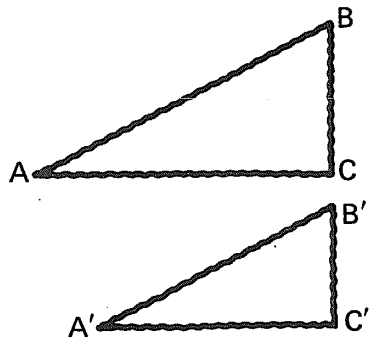
Debemos observar que:

si dos triángulos tienen dos ángulos interiores respectivamente congruentes, de hecho sus *tres ángulos interiores* son respectivamente *congruentes.*

86

Ahora bien,

dos triángulos rectángulos son semejantes, si y sólo si tienen respectivamente congruente uno de sus ángulos agudos.



87

Sabemos que:

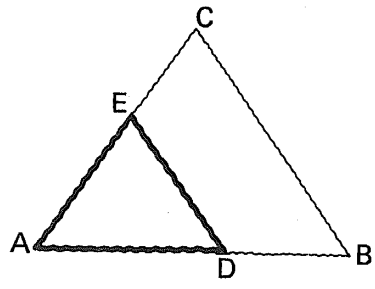
$\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CB}$.

Entonces,

¿son semejantes los triángulos ABC y ADE?

Sí/No

porque [_____]



- Sí
- cumplen con S5. PAR/PER

$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{AE}$ reflexividad de la relación de paralelismo

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ ídem

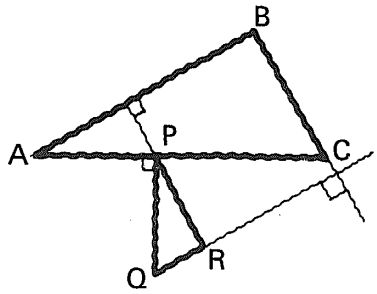
$\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{ED}$ simetría de la relación de paralelismo

88

¿Son semejantes los triángulos ABC y PQR?

Sí/No

porque



Sí

cumplen con S5. PAR/PER

89

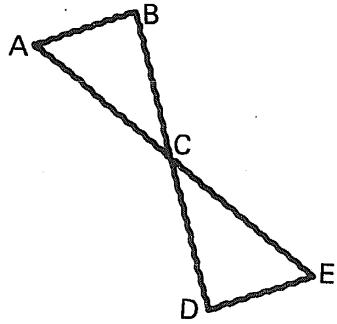
Si

$$\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overleftrightarrow{CD}|} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overleftrightarrow{CE}|}$$

¿son semejantes los triángulos ABC y CDE?

Sí/No

porque



Sí

cumplen con S2. LAL
$<ACB \cong <DCE$

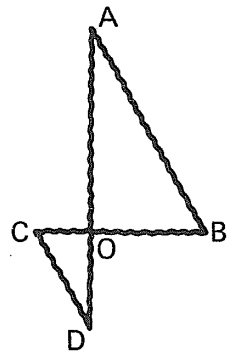
90

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

¿Basta la información proporcionada para concluir que

$\triangle OAB \sim \triangle OCD$?

Sí/No



Sí

por S5. PAR/PER

91

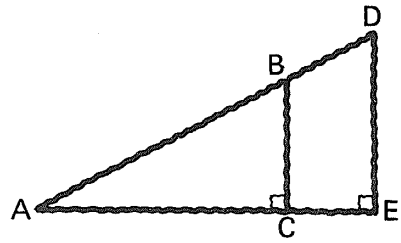
Atención.

¿Basta la información proporcionada para concluir que

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$?

Sí/No

porque [_____]



- Sí

Por ejemplo:

- son dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo respectivamente congruente

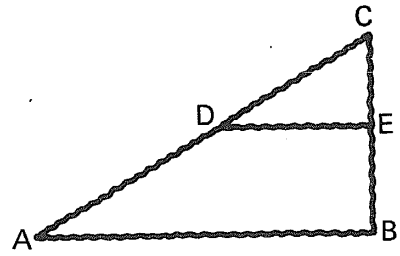
92

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$

¿Es suficiente la información proporcionada para asegurar que

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$?

Sí/No



Sí

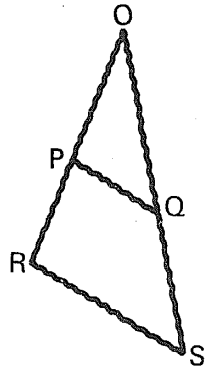
93

$$\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OR}|} = \frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OS}|} = \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{RS}|}$$

¿Podemos afirmar que

$\triangle OPQ \sim \triangle ORS$?

Sí/No



Sí

por S1. LLL

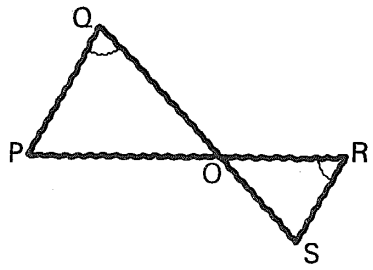
94

$\angle PQO \cong \angle ORS$

¿Podemos afirmar que

$\triangle OPQ \sim \triangle ORS$?

Sí/No



Sí

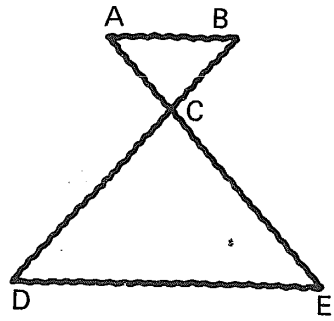
por S3. AA(A)

95

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$

$\triangle ABC \sim \triangle CDE$

V/F



V

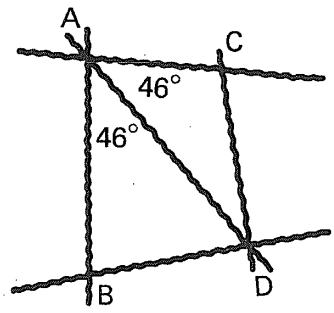
Por S3. AA(A)
o bien
por S5. PAR/PER

96

¿Basta la información proporcionada para asegurar que

$\triangle ABD \sim \triangle ADC$?

Sí/No



No

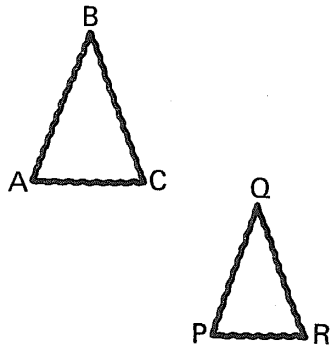
97

△ABC y △PQR son isósceles.

¿Basta esta información para afirmar que

△ABC ~ △PQR?

Sí/No



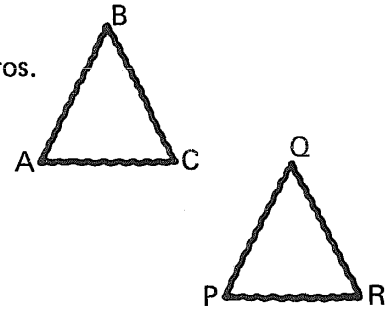
No

98

△ABC y △PQR son equiláteros.

¿Basta esta información para afirmar que son semejantes?

Sí/No



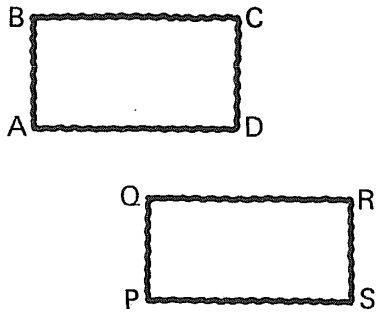
Sí

99

ABCD y PQRS son dos rectángulos

¿Basta esta información para afirmar que son semejantes?

Sí/No



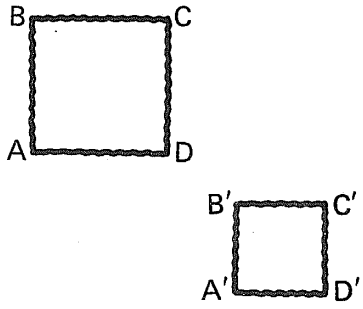
No

100

ABCD y A'B'C'D'
son cuadrados.

¿Basta esta información
para afirmar
que son semejantes?

Sí/No



Sí

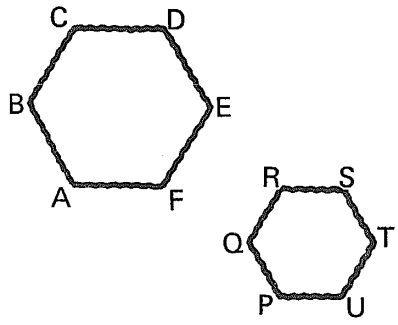
101

ABCDEF y PQRSTU

son exágonos regulares
convexos.

¿Basta esta información
para asegurar que son
semejantes?

Sí/No



Sí

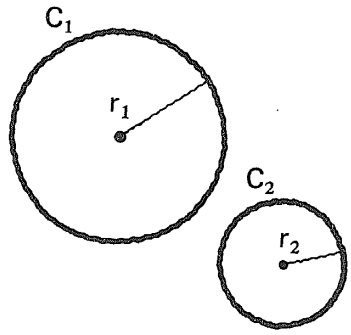
102

c_1 y c_2 son circunferencias
de radios r_1 y r_2
respectivamente.

¿Basta esta información
para asegurar que son
semejantes?

Sí/No

En caso de serlo, la razón
de semejanza de c_1 a c_2
es ⌊_____⌋



Sí

$\frac{r_1}{r_2}$

4.6.2.1

Práctica adicional
si se considera
necesario.

4.6.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *enunciar*, los criterios de semejanza de dos triángulos,
- *aplicar* los criterios de semejanza para la identificación de pares de triángulos semejantes,
- *aplicar* la definición de semejanza de polígonos a la identificación de pares de polígonos semejantes.

6.3

Cuarta proporcional

103

En una proporción, puede faltar un término:

$$\frac{4}{2} = \frac{x}{3}$$

que, a veces, es fácil de determinar por simple inspección.

En este caso el término faltante es $x = \lfloor___\rfloor$

6

104

¿Cuál es el término que falta?

$$\frac{28}{4} = \frac{14}{\lfloor___\rfloor}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\lfloor___\rfloor}{4}$$

2

2

105

A este término faltante (no conocido)
suele llamársele

cuarta proporcional

de los otros tres,
y puede
ser determinado por
medio de la propiedad
que hemos enunciado
al principio de este módulo:

en toda proporción
el producto de los extremos
es igual al producto
de los medios.

106

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

se verifica que $a \cdot d = b \cdot c$

Por ejemplo, en la proporción:

$\frac{42}{6} = \frac{21}{x}$

se verifica $\square = \square$

de donde: $x = \square$

$42x = 21 \times 6$

$\frac{21 \times 6}{42} = 3$

107

$\frac{x}{5} = \frac{20}{4}$

$\square = \square$

$x = \square$

$4x = 20 \times 5$

$\frac{20 \times 5}{4} = 25$

108

$$\frac{1\,472}{6} = \frac{x}{2}$$

$$\square = \square$$

$$x = \square$$

$$1\,472 \times 2 = 6x$$

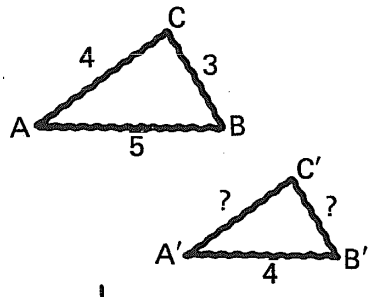
$$\frac{1\,472 \times 2}{6} = 490.66\ldots$$

109

Se requiere conocer las medidas de los lados $\overrightarrow{A'C'}$ y $\overrightarrow{B'C'}$

para que

$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$



Para determinar la medida de $\overrightarrow{A'C'}$ podemos escribir la siguiente proporción: $\square$

de donde $|\overrightarrow{A'C'}| =$ $\square$

- $\dfrac{|\overrightarrow{A'C'}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{AB}|}$
- $\dfrac{|\overrightarrow{A'B'}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$

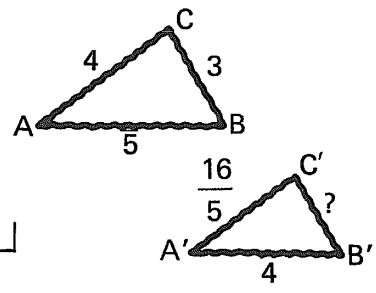
$$= \frac{4 \times 4}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$$

110

Para determinar $|\overrightarrow{B'C'}|$ podemos escribir la siguiente proporción

$\square$

de donde $|\overrightarrow{B'C'}| =$ $\square$



Por ejemplo:

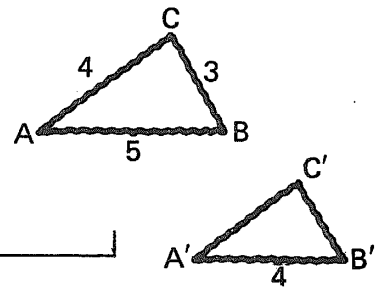
- $\dfrac{|\overrightarrow{B'C'}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{AB}|}$
- $\dfrac{|\overrightarrow{A'B'}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{4 \times 3}{5} = 2.4$

111

Procedimiento alternativo.

1. Determinamos la razón de semejanza del $\triangle A'B'C'$ al $\triangle ABC$.

$r = \square = \square$



$\frac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{4}{5} = 0.8$

112

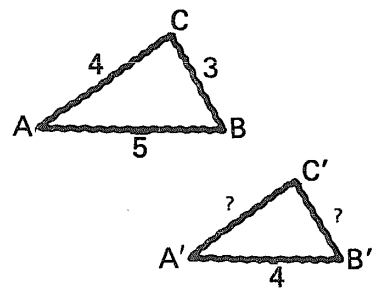
Atención.

2. Determinamos:

$|\overrightarrow{A'C'}| = r \cdot |\overrightarrow{AC}| = \square$

y

$|\overrightarrow{B'C'}| = r \cdot |\overrightarrow{BC}| = \square$



$\frac{4}{5} \times 4 = \frac{16}{5}$ (ó $0.8 \times 4 = 3.2$)

$\frac{4}{5} \times 3 = \frac{12}{5}$ (ó $0.8 \times 3 = 2.4$)

113

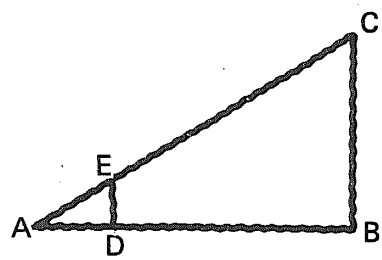
$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$
por lo tanto
$\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Se requiere determinar $|\overrightarrow{BC}|$ dados:

$|\overrightarrow{AB}| = 57$
$|\overrightarrow{DE}| = 1.5$
$|\overrightarrow{AD}| = 3.5$

Proporción: $\square$

de donde: $|\overrightarrow{BC}| = \square$



Por ejemplo:

- $\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{DE}|} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AD}|}$
- $\frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{AD}|} \doteq 24.43$

114

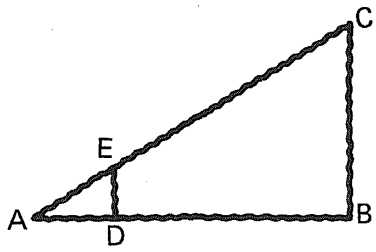
Usando
el procedimiento alternativo.

$|\overleftrightarrow{AB}| = 57$
$|\overleftrightarrow{DE}| = 1.5$
$|\overleftrightarrow{AD}| = 3.5$

Razón de semejanza
del $\triangle ABC$ al $\triangle ADE$:

$r =$ [ ] $=$ [ ]

$|\overleftrightarrow{BC}| =$ [ ]



- $\dfrac{|\overleftrightarrow{AB}|}{|\overleftrightarrow{AD}|} = \dfrac{57}{3.5} \doteq 16.286$

- $r \cdot |\overleftrightarrow{DE}| = 16.286 \times 1.50$
  $\doteq 24.43$

115

$\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{ST}$ por lo tanto:

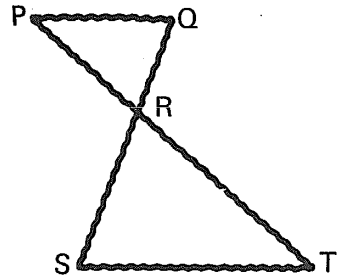
$\triangle PQR \sim \triangle RST$.

Se requiere determinar $|\overleftrightarrow{ST}|$
sabiendo que:

$|\overleftrightarrow{RS}| = 17.2$
$|\overleftrightarrow{QR}| = 6.4$
$|\overleftrightarrow{PQ}| = 8.1$

Proporción: [ ]

de donde $|\overleftrightarrow{ST}| =$ [ ]



Por ejemplo:

- $\dfrac{|\overleftrightarrow{ST}|}{|\overleftrightarrow{PQ}|} = \dfrac{|\overleftrightarrow{RS}|}{|\overleftrightarrow{QR}|}$

- $\dfrac{|\overleftrightarrow{RS}| \cdot |\overleftrightarrow{PQ}|}{|\overleftrightarrow{QR}|} = \dfrac{17.2 \times 8.1}{6.4} = 21.77$

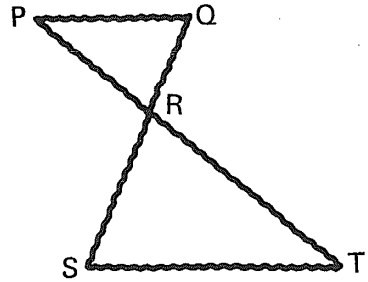
116

$|\overleftrightarrow{RS}| = 17.2$
$|\overleftrightarrow{QR}| = 6.4$
$|\overleftrightarrow{PQ}| = 8.1$

Razón de semejanza
del $\triangle$[ ] al $\triangle$[ ]

$r =$[ ]

$|\overleftrightarrow{ST}| =$[ ]



RST ● PQR

$\dfrac{|\overleftrightarrow{RS}|}{|\overleftrightarrow{QR}|} = \dfrac{17.2}{6.4} = 2.6875$

$r \cdot |\overleftrightarrow{PQ}| = 2.6875 \times 8.1 \doteq 21.77$

4.6.3.1

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

4.6.3.2

Práctica de resolución de problemas mediante
la aplicación de los conceptos de semejanza
estudiados.

4.6.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* la cuarta proporcional en una proporción, dados los otros tres términos,
- *determinar* en un par de triángulos identificados como semejantes, la medida de un lado de uno de ellos, a partir de las medidas de otros lados,
- *aplicar* los conocimientos relacionados con la semejanza de triángulos a problemas prácticos.

6.4

Teorema de la media proporcional

117

En algunas proporciones sucede que

los medios son iguales:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

118

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

en que los medios son iguales.

Aplicando la propiedad:

> *en toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios*

obtenemos: $a \cdot c = b^2$

119

De $a \cdot c = b^2$

obtenemos $b =$ _____

$\sqrt{ac}$

120

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

llamamos

media proporcional de a y c

al término b.

121

La **media proporcional** (b) de dos números (a y c), puede calcularse por medio de la expresión:

$b = \sqrt{ac}$

pudiendo establecerse la proporción:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

122

Por ejemplo:

Se requiere determinar la

media proporcional

de 5 y 20.

b = [ ] = [ ]

$\sqrt{5 \times 20} = \sqrt{100} = 10$

123

Determinado el valor de la media proporcional de 5 y 20, podemos escribir alguna de las siguientes proporciones:

$\frac{5}{10} = \frac{10}{20}$ ó $\frac{20}{10} = \frac{10}{5}$

124

Determinar la media proporcional de 18 y 2:

b = [ ]

y escribir las proposiciones correspondientes:

[ ] ó [ ] .

6

$\frac{18}{6} = \frac{6}{2}$ • $\frac{2}{6} = \frac{6}{18}$

125

Calcular la media proporcional
de 3 y 27:

b = [ ]

y
escribir las proporciones correspondientes:

[ ] ó [ ]

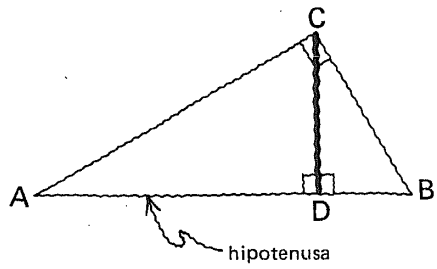
9

$\frac{3}{9} = \frac{9}{27}$ ● $\frac{27}{9} = \frac{9}{3}$

126

He aquí un
teorema que
intentaremos
demostrar.

En un triángulo rectángulo, la altura del vértice correspondiente al ángulo recto, es media proporcional de los segmentos que determina en la hipotenusa.



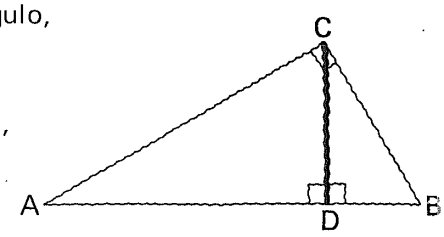
127

Si:

ABC es un triángulo rectángulo,
$<C$ es el ángulo recto,
$\overleftrightarrow{CD}$ es la altura
correspondiente al vértice C,
y $\overleftrightarrow{AB}$ es la hipotenusa,

entonces, de acuerdo con el
enunciado del cuadro anterior:

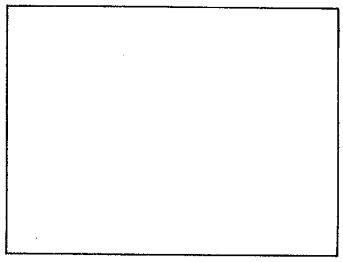
[ ]

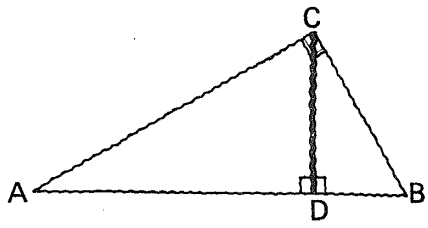


$\frac{|\overleftrightarrow{AD}|}{|\overleftrightarrow{CD}|} = \frac{|\overleftrightarrow{CD}|}{|\overleftrightarrow{DB}|}$

128

Hipótesis.
Sea(n) ...





Por ejemplo:

ABC un triángulo rectángulo,

$\measuredangle C = 90°$

$\overleftrightarrow{CD}$ la altura correspondiente al vértice C,

$\overleftrightarrow{AB}$ la hipotenusa,

129

Sean: ABC un triángulo rectángulo (H1)
$\measuredangle C = 90°$ (H2)
$\overleftrightarrow{CD}$ la altura correspondiente al vértice C (H3)
$\overleftrightarrow{AB}$ la hipotenusa (H4)

Tesis o
Conclusión .

Demostrar que:

[_____]

No perder de vista la figura del cuadro anterior.

$$\frac{|\overleftrightarrow{AD}|}{|\overleftrightarrow{CD}|} = \frac{|\overleftrightarrow{CD}|}{|\overleftrightarrow{DB}|}$$

130

Se requiere demostrar que:

$$\frac{|\overleftrightarrow{AD}|}{|\overleftrightarrow{CD}|} = \frac{|\overleftrightarrow{CD}|}{|\overleftrightarrow{DB}|}$$

Proposiciones:	Razones:
1. $\triangle ABC \sim \triangle ADC$	1. [_____]

$\triangle ABC$ es rectángulo (H1);

$\triangle ADC$ es rectángulo. $< ADC$ es recto por definición de altura;

$\triangle ABC$ y $\triangle ADC$ tienen el ángulo BAC común.

131

1. $\triangle ABC \sim \triangle ADC$	1. Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo respectivamente congruente.
2. $\triangle ABC \sim \triangle CDB$	2. $\llcorner$ _____ $\lrcorner$.

Son triángulos rectángulos con el ángulo ABC común.

132

1. $\triangle ABC \sim \triangle ADC$	1. Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.
2. $\triangle ABC \sim \triangle CDB$	2. Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.
3. $\triangle ADC \sim \triangle CDB$	3. $\llcorner$ _____ $\lrcorner$

Transitividad de la relación de semejanza.

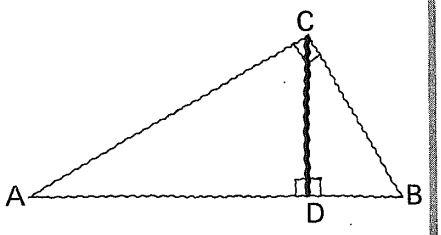
133

1. $\triangle ABC \sim \triangle ADC$	1. Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.
2. $\triangle ABC \sim \triangle CDB$	2. Misma razón.
3. $\triangle ADC \sim \triangle CDB$	3. Transitividad de la relación de semejanza.
4. $\frac{\lvert\overrightarrow{AD}\rvert}{\lvert\overrightarrow{CD}\rvert} = \frac{\lvert\overrightarrow{CD}\rvert}{\lvert\overrightarrow{DB}\rvert}$	4. $\llcorner$ _____ $\lrcorner$.

Criterio de semejanza LLL.

134

Estudiar con atención:



Demostrar que:

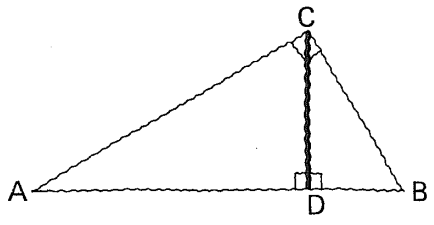
$$\frac{|\overleftrightarrow{AD}|}{|\overleftrightarrow{CD}|} = \frac{|\overleftrightarrow{CD}|}{|\overleftrightarrow{DB}|}$$

Proposiciones:	Razones:
1. $\triangle ABC \sim \triangle ADC$	1. Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.
2. $\triangle ABC \sim \triangle CDB$	2. Misma razón.
3. $\triangle ADC \sim \triangle CDB$	3. Transitividad de relación de semejanza.
4. $\frac{\lvert\overleftrightarrow{AD}\rvert}{\lvert\overleftrightarrow{CD}\rvert} = \frac{\lvert\overleftrightarrow{CD}\rvert}{\lvert\overleftrightarrow{DB}\rvert}$ LCDD	4. S1. LLL.

135

Teorema 20.

En un triángulo rectángulo, la altura del vértice correspondiente al ángulo recto, es media proporcional de los segmentos que determina en la hipotenusa.



$$\frac{|\overleftrightarrow{AD}|}{|\overleftrightarrow{CD}|} = \frac{|\overleftrightarrow{CD}|}{|\overleftrightarrow{DB}|}$$

136

El $\triangle ABC$ es rectángulo en C.

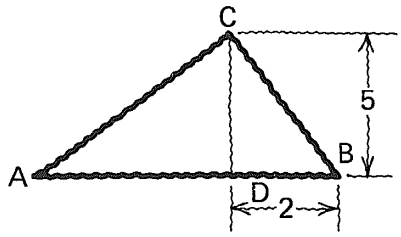
Se requiere determinar $|\overrightarrow{AD}|$

Proporción: $\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{DB}|}$

por teorema 20,

de donde

$|\overrightarrow{AD}| = \frac{|\overrightarrow{CD}|^2}{|\overrightarrow{DB}|} = \frac{5^2}{2} = 12.5$



137

$\measuredangle C = 90°$

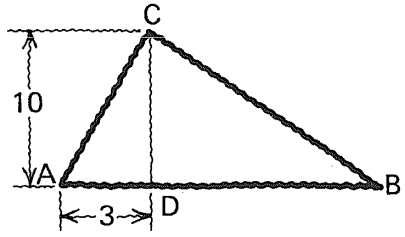
Se requiere determinar $|\overrightarrow{DB}|$

Proporción: $\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{DB}|}$

por teorema 20,

de donde

$|\overrightarrow{DB}| = \frac{|\overrightarrow{CD}|^2}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{10^2}{3} = 33.333$



138

$\measuredangle R = 90°$

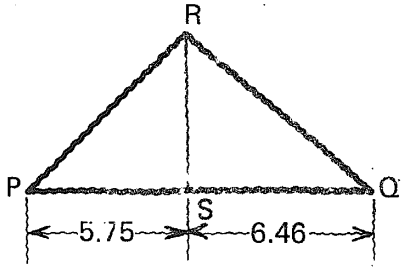
Se requiere determinar la medida de la altura $\overrightarrow{RS}$.

Proporción: $\frac{|\overrightarrow{PS}|}{|\overrightarrow{RS}|} = \frac{|\overrightarrow{RS}|}{|\overrightarrow{SQ}|}$

por teorema 20,

de donde

$|\overrightarrow{RS}| = \sqrt{|\overrightarrow{PS}| \cdot |\overrightarrow{SQ}|} = \sqrt{5.75 \times 6.46} \doteq 6.09$



4.6.4.1

Práctica adicional,
si se considera
necesario.

4.6.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *demostrar* el **teorema** 20:

  En el triángulo rectángulo, la altura del vértice correspondiente al ángulo recto, es media proporcional de los segmentos que determina en la hipotenusa;

- *aplicar* el **teorema** 20 a la determinación de la altura del vértice correspondiente al ángulo recto de un triángulo rectángulo, a partir de los segmentos por ella determinados en la hipotenusa.

6.5

Teorema de Pitágoras

139

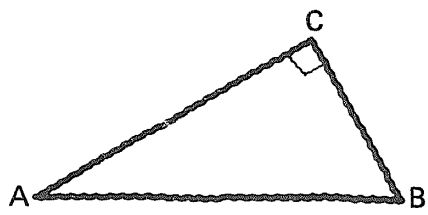
Vamos a tratar de demostrar que:

"en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa".

140

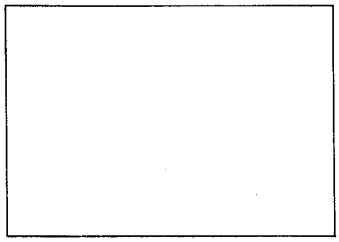
Enunciado de la forma p $\Leftrightarrow$ q:

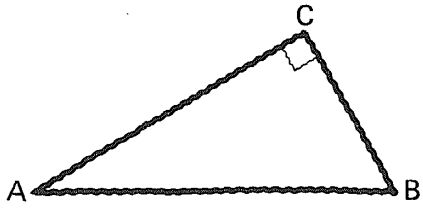
Un triángulo es rectángulo
si y sólo si
la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.



141

Hipótesis.
Sea (n)...





Por ejemplo:

ABC un triángulo rectángulo tal, que $<C$ es recto.

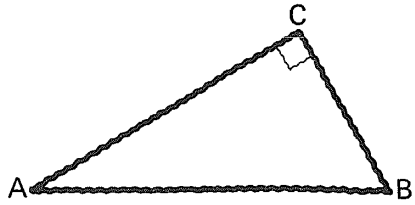
142

Sea

ABC un triángulo rectángulo en que $<C$ es recto.

Tesis
o
Conclusión.

Demostrar que:



$|\overleftrightarrow{AC}|^2 + |\overleftrightarrow{BC}|^2 = |\overleftrightarrow{AB}|^2$

143

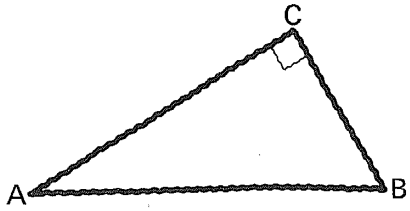
Sea

ABC un triángulo rectángulo en que
$<C$ es recto

Demostrar que:

$|\overleftrightarrow{AC}|^2 + |\overleftrightarrow{BC}|^2 = |\overleftrightarrow{AB}|^2$

Trazar un plan para la demostración.

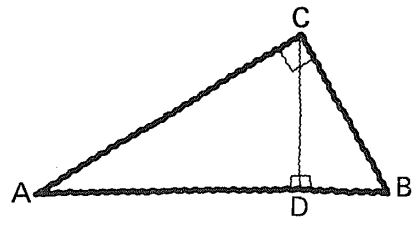


144

Demostrar que:

$|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$

Trazamos $\overrightarrow{CD}$, altura del vértice C.



Proposiciones:	Razones:
1. $\triangle ABC \sim \triangle BCD$	1. [ ]

Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.

145

1. $\triangle ABC \sim \triangle BCD$	1. Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.
2. $\frac{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert} = \frac{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert}{\lvert\overrightarrow{DB}\rvert}$	2. [ ]

S1. LLL

146

1. $\triangle ABC \sim \triangle BCD$	1. Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.
2. $\frac{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert} = \frac{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert}{\lvert\overrightarrow{DB}\rvert}$	2. S1. LLL
3. $\lvert\overrightarrow{CB}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{DB}\rvert$	3. [ ]

Propiedad de las proporciones "el producto de los medios es igual al producto de los extremos".

147

1.	$\triangle ABC \sim \triangle BCD$	1. Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.
2.	$\frac{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert} = \frac{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert}{\lvert\overrightarrow{DB}\rvert}$	2. S1. LLL
3.	$\lvert\overrightarrow{CB}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{DB}\rvert$	3. Propiedad de las proporciones.
4.	$\triangle ABC \sim \triangle ADC$	4. [ ]

Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.

148

1.	$\triangle ABC \sim \triangle BCD$	1. Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.
2.	$\frac{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert} = \frac{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert}{\lvert\overrightarrow{DB}\rvert}$	2. S1. LLL
3.	$\lvert\overrightarrow{CB}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{DB}\rvert$	3. Propiedad de las proporciones
4.	$\triangle ABC \sim \triangle ADC$	4. Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.
5.	$\frac{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert} = \frac{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AD}\rvert}$	5. [ ].

S1. LLL

149

3.	$\lvert\overrightarrow{CB}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{DB}\rvert$	3. Propiedad de las proporciones
4.	$\triangle ABC \sim \triangle ADC$	4. Son triángulos rectángulos con un ángulo agudo común.
5.	$\frac{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert} = \frac{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AD}\rvert}$	5. S1. LLL
6.	$\lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AD}\rvert$	6. [ ]

Propiedad de las proporciones.

150

Seguiremos trabajando en las proposiciones 3 y 6.

151

3. $|\overrightarrow{CB}|^2 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DB}|$

6. $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|$

152

3. $|\overrightarrow{CB}|^2 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DB}|$

6. $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|$

7. $|\overrightarrow{CB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DB}| + |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|$ 7. [_____]

Propiedad aditiva de la relación de igualdad.

153

7. $|\overrightarrow{CB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DB}| + |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|$

7. Propiedad aditiva.

8. $|\overrightarrow{CB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}| (|\overrightarrow{DB}| + |\overrightarrow{AD}|)$

8. [ ]

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, aplicada al segundo miembro.

154

8. $|\overrightarrow{CB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}| (|\overrightarrow{DB}| + |\overrightarrow{AD}|)$

8. Distributividad.

9. $|\overrightarrow{CB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}|^2$

9. [ ]

LCDD

Propiedad sustitutiva:

$|\overrightarrow{DB}| + |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}|$

y

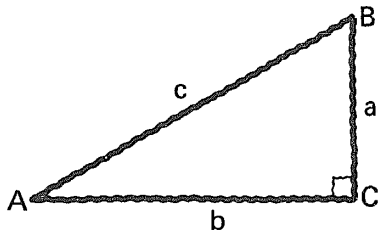
$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}|^2$

155

Teorema 21 (de Pitágoras).

ABC es un triángulo rectángulo tal que $<C$ es recto.

$a^2 + b^2 = c^2$



156

El **Teorema de Pitágoras** nos permite determinar la medida de uno de los lados de un triángulo rectángulo, a partir de las medidas de los otros dos lados.

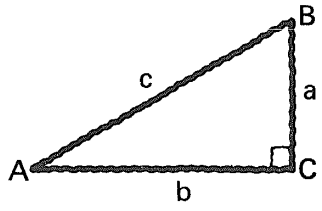
157

$a^2 + b^2 = c^2$

a y **b** representan las medidas de los catetos,
c representa la medida de la hipotenusa.

Si conocemos las medidas de los catetos y se requiere determinar la medida de la hipotenusa:

$c =$ ⌊_____⌋



$\sqrt{a^2 + b^2}$

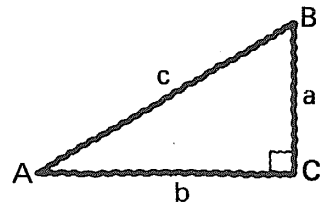
158

$a^2 + b^2 = c^2$

Si conocemos la medida de la hipotenusa y de un cateto:

$a =$ ⌊_____⌋

$b =$ ⌊_____⌋



$\sqrt{c^2 - b^2}$

$\sqrt{c^2 - a^2}$

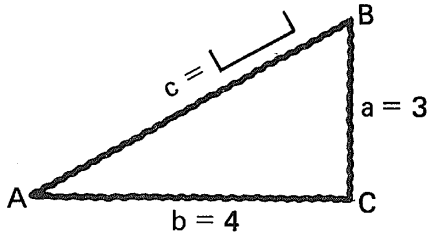
159

El △ABC es rectángulo y <C es recto.

$c^2 =$ ⌊ ⌋

$c =$ ⌊ ⌋

$c =$ ⌊ ⌋



- $c^2 = a^2 + b^2$
- $\sqrt{a^2 + b^2}$
- $= \sqrt{3^2 + 4^2}$

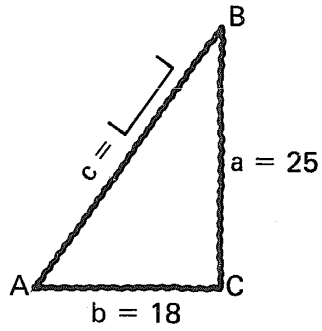
  $= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$

- $= 5$

160

El △ABC es rectángulo y <C es recto.

$c =$ ⌊ ⌋



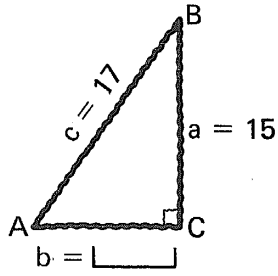
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{25^2 + 18^2}$

30.81

161

$b =$ ⌊ ⌋

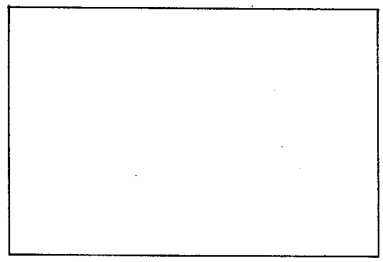


$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

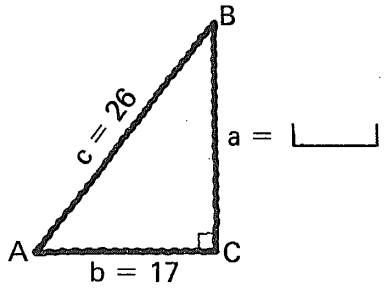
$= \sqrt{17^2 - 15^2}$

8

162



a = ⌊_____⌋



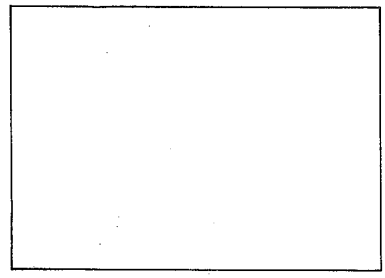
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$= \sqrt{26^2 - 17^2}$

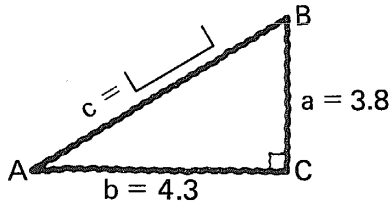
$= \sqrt{676 - 289} = \sqrt{387}$

19.67

163



c ≐ ⌊_____⌋



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{3.8^2 + 4.3^2}$

$= \sqrt{14.44 + 18.49}$

$= \sqrt{32.93}$

5.74

4.6.5.1

Práctica adicional
si se considera
necesario

4.6.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *demostrar* el **teorema 21** (de Pitágoras):

  "En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa".

- *aplicar* el **teorema** de Pitágoras para determinar la medida de uno de los lados de un triángulo rectángulo a partir de las medidas de los otros dos lados.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 10 de mayo de 1984,
en los talleres de Impresora Lorenzana, S. A.,
Cafetal núm. 661, Col. Granjas México,
se encuadernó en Servicios Editoriales Profesionales, S. A.,
Av. 5 de Mayo núm. 495, Col. Merced Gómez,
Deleg. Álvaro Obregón, 01600, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO EV KC 100